



CONCURSUL DOLJEAN DE MATEMATICĂ
19 martie 2016

Clasa a XI-a

1. Dacă $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, determinați $n \in \mathbb{N}, n \leq 20$, cu proprietatea

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Fie $A = (a_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), n \geq 4$. Se construiește matricea pătratică de ordinul $n - 1, B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n, i, j \neq k}, k = \overline{1, n}$, definită prin:

$$b_{ij} = a_{ij} \cdot a_{kk} - a_{ik} \cdot a_{kj}.$$

Să se determine $\alpha \in \mathbb{C}$ astfel încât $\det B = \alpha \cdot \det A$.

3. Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin:

$$a_1 = 1 \text{ și } \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n+1} = \frac{a_{n+1}}{n}, (\forall) n \geq 1.$$

Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{(n-1)!}$.

4. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât există $a \in (0,1)$, cu proprietatea :

$$|f(x)| \leq a \cdot |x|, (\forall) x \in \mathbb{R}.$$

a) Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $f(x) = x$.

b) Dacă $g_n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ ori}}, n \in \mathbb{N}^*$, arătați că: $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(2016) = 0$.

c) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x))^2}{x}$ și $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (f(x))^2}{\sin x}$.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte;
- Timp de lucru: 3 ore.